Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Líneas de trabajos ofertadas:

Distintos problemas dentro del Análisis topológico de datos de biología espacial

Breve descripción de las líneas propuestas:

El análisis topológico de datos, conocido como TDA por sus siglas en inglés, permite estudiar características topológicas de nubes de puntos que pueden representar datos de muy distinta naturaleza. Se propone el estudio de herramientas topológicas de este campo que permitan el análisis de datos de biología espacial (que entre otras cosas, estudia la interacción espacial de distintos tipos de células). En concreto, estamos interesados en el análisis de datos en distintos escenarios:

a. nubes de puntos etiquetadas representando distintos tipos de células en un microentorno de cáncer, con el objetivo de estudiar las herramientas que permiten caracterizar interacciones espaciales entre distintos tipos celulares;
b. células madre en un video monitorizando un proceso de diferenciación celular, con el objetivo de detectar si existe alguna correlación entre las interacciones espaciales y la diferenciación celular final;
c. simulaciones 3D de conjuntos de células que varían en el tiempo tanto en expresión de uno o más genes como en morfología, con el objetivo de determinar las mejores herramientas de TDA para detectar la correlación entre el cambio en el tiempo de la expresión génica y de la morfología.

Responsables: María José Jiménez Rodríguez en colaboración con distintos investigadores, según el problema concreto escogido:

a. Bernadette Stolz (Max Planck Institute of Biochemistry, Alemania)
b. Elena Camacho Aguilar (Universidad de Sevilla)
c. Miguel Brun-Usan y Fernando Casares (Centro Andaluz de Biología del Desarrollo (CABD))

En Sevilla, a 08 de octubre de 2026

Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Líneas de trabajos ofertadas: 1. Teoría de Morse Discreta aplicada al análisis topológico de datos. 2. . Análisis topológico de datos, Homología Persistente

1. **Teoría de Morse Discreta aplicada al análisis topológico de datos** La teoría de Morse clásica (Morse, 1934; Milnor, 1963) analiza la topología de una variedad diferenciable M mediante los puntos críticos de una función suave $f : M \to \mathbb{R}$. Asociando a cada punto crítico no degenerado una k-célula según su índice de Morse, se reconstruye la homotopía global de M y se derivan sus invariantes homológicos mediante un complejo reducido. Este estudio de los cambios topológicos a lo largo del flujo de gradiente sentó las bases del análisis de datos topológico (ADT) (Edelsbrunner et al., 2002; Carlsson, 2009).
La teoría de Morse discreta (Forman, 1998) traslada estos principios a complejos celulares combinatorios, lo que permite simplificar filtraciones y acelerar el cálculo de la homología persistente en complejos de Vietoris-Rips, Čech y Alpha (Robins et al., 2011; Mischaikow y Nanda, 2013). Asimismo, facilita la eliminación de ruido topológico cancelando pares críticos de baja persistencia (Bauer, 2013) y en algoritmos modernos de reducción matricial (Bauer, 2021; Bauer y Roll, 2024).
Frente a las limitaciones algebraicas de la persistencia multiparamétrica para descomponer módulos en intervalos (Carlsson y Zomorodian, 2009), la teoría de Conley (Conley, 1978) y la matriz de conexión (Franzosa, 1989) generalizan el complejo de Morse a sistemas dinámicos mediante conjuntos invariantes aislados. Este enfoque comprime la información de cadenas preservando las estructuras homológicas globales (Harker et al., 2021). El objetivo de este trabajo consiste en relacionar la teoría de Morse discreta con estas matrices de conexión para computar eficientemente la dinámica multiparamétrica.

2. Análisis topológico de datos, Homología Persistente. Este Trabajo Final de Máster aborda el Análisis Topológico de Datos (ADT) y la homología persistente (HP) —herramienta clave para extraer la forma de los datos e integrarla en aprendizaje automático, pero incapaz de distinguir conjuntos de datos totalmente distintos que generan códigos de barras idénticos. Para superar esta limitación, el proyecto investiga los módulos de escalera (*ladder modules*), que representan los morfismos entre módulos de persistencia de conjuntos intrínsecamente relacionados (por ejemplo, una muestra X dentro de una nube de puntos Y). Objetivos del proyecto: 1. Revisión teórica y formalización: Unificar la notación de la literatura sobre módulos de escalera, describir sus morfismos mediante matrices y códigos de barras, y calcular sus módulos asociados (imágenes, *kernels*, etc.). 2. Desarrollo de software: Implementar algoritmos para calcular estas representaciones matriciales en diversos tipos de datos (grafos ponderados, complejos cúbicos) empleando entornos como Python, C++ y la librería Gudhi. 3. Extensión (si el tiempo lo permite): Implementar otros invariantes topológicos en fase de investigación dentro del grupo TAPAS (Departamento de Matemática Aplicada I).

Responsables**: Álvaro Torras-Casas** (Matemática Aplicada I),

Cotutores: Línea 1: Desamparados Fernández Ternero (Geometría y Topología). Línea 2. Marco Delgado Garrido (Matemática Aplicada i)

En Sevilla, a 20 de octubre de 2026

Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Líneas de trabajos ofertadas:

Línea 1: Del electrón a la red: acotar la correlación mediante grafos

¿Puede la estructura de una red mejorar las cotas de una matriz? Se representarán matrices de correlación como grafos ponderados y se combinarán los radios de Gershgorin con propiedades de conectividad y distancia. El objetivo es comparar cotas, establecer resultados en familias concretas y estudiar su interpretación física.

Línea 2: Descubrir leyes universales: escalado cuántico y estructura de redes

¿Por qué sistemas distintos pueden obedecer una misma ley matemática? Se estudiarán relaciones de escalado de energías y correlaciones en modelos cuánticos, explorando si los descriptores de redes ayudan a interpretar sus regularidades. Se combinarán análisis de modelos, ajuste funcional y evaluación de errores.

Línea 3: ¿Puede un polinomio reconocer una red? Tutte-unicidad y huellas espectrales

¿Cuándo un invariante identifica por completo un grafo? Se investigará la unicidad asociada al polinomio de Tutte en familias seleccionadas y se comparará su capacidad de distinción con la información de matrices y espectros. Se propondrán experimentos de cálculo simbólico.

Línea 4: Patrones al infinito: escalado y universalidad en familias de grafos

¿Qué propiedades permanecen cuando una red crece? Se estudiará el comportamiento asintótico de invariantes combinatorios y espectrales en grafos y teselaciones, buscando normalizaciones y tasas de crecimiento. Las conclusiones se compararán, a nivel metodológico, con las leyes de escalado de sistemas cuánticos.

Las líneas unen teoría de grafos, dimensión e invariantes combinatorios con correlación electrónica, análisis matricial y leyes de escalado.

Responsables: **Alexander Odriazola y Maria Pastora Revuelta**

Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Líneas de trabajos ofertadas:

1. **Topología computacional para el *steering* de activaciones en modelos de lenguaje.**
2. **Clases características y orientabilidad de representaciones aprendidas mediante atlas de autoencoders**.

Breve descripción de las líneas propuestas:

- **Línea 1.** El *activation steering* modifica el comportamiento de un modelo de lenguaje sumando un vector a sus activaciones en una capa concreta, sin reentrenar. Elegir la capa sigue siendo una cuestión empírica. Se estudiará la nube de activaciones capa a capa mediante homología persistente y se analizará si invariantes como la persistencia total en dimensión 0 (longitud del árbol generador mínimo), la entropía persistente o las características en dimensión 1 anticipan la eficacia del steering. Combina teoría (filtraciones de Vietoris–Rips, estabilidad de diagramas) con experimentos sobre modelos de tamaño moderado (GPT-2, Pythia) usando Gudhi y TransformerLens. Requiere nociones de topología algebraica y Python.

- **Línea 2.** Bajo la hipótesis de la variedad, los datos se concentran cerca de una variedad de baja dimensión. Un autoencoder captura una sola carta; una colección de autoencoders locales con funciones de transición define un atlas, y el cociclo de orientación asociado permite decidir si la variedad es orientable, es decir, calcular su primera clase de Stiefel–Whitney vía cohomología de Čech del recubrimiento. Se desarrollará el marco teórico (fibrados vectoriales, clases características, cohomología de Čech) y se validará en ejemplos controlados (banda de Möbius, botella de Klein) y en datos de imagen (COIL-100). Línea de carácter más teórico, para estudiantes con interés en topología diferencial y algebraica.

Responsables: Eduardo Paluzo-Hidalgo En Sevilla, a 21 de octubre de 2026

Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Línea 1. Modelos s^2 para la representación y el análisis de cadenas de Markov. Se propone estudiar la representación de cadenas de Markov finitas y homogéneas mediante modelos topológicos de escala y espacio (modelos s^2), tomando como referencia el marco algebraico para hipergrafos de Molina-Abril et al. (2025). El objetivo será relacionar la evolución de las distribuciones de probabilidad con una sucesión de complejos de cadenas y aplicaciones de transición compatibles, y determinar qué información probabilística y algebraica aporta esta representación. El trabajo partirá de una matriz de transición estocástica por columnas y de sus potencias para construir los operadores de borde en las sucesivas escalas. Se formalizarán las transiciones ascendentes y descendentes y se verificará el cumplimiento de los axiomas del modelo s^2. Se estudiará la relación entre los rangos, núcleos y valores singulares de los operadores de borde y las propiedades de la cadena, incluyendo su distribución estacionaria y el comportamiento a largo plazo. Se analizará también el alcance de los invariantes homológicos, que pueden permanecer constantes aunque evolucione la distribución de probabilidad. La parte computacional consistirá en implementar la construcción en Python o R y comparar, en ejemplos de pequeño tamaño, las distribuciones teóricas con las frecuencias empíricas obtenidas mediante simulación de trayectorias. Se considerarán cadenas irreducibles y reducibles, así como ejemplos periódicos, para identificar el alcance y las limitaciones de la representación. Como ampliación opcional se estudiarán transiciones descendentes basadas en pseudoinversas. Se entregarán una memoria y código reproducible. Se recomiendan conocimientos de probabilidad, álgebra lineal y programación; las nociones de topología algebraica necesarias se introducirán durante el trabajo.

Línea 2. Modelos s^2 para el análisis topológico y probabilístico de hipergrafos. Se propone estudiar la relación entre la estructura topológica de los hipergrafos y su modelización probabilística mediante los modelos topológicos de escala y espacio (modelos s^2) introducidos por Molina-Abril et al. (2025). Estos modelos permiten analizar relaciones de incidencia y adyacencia a distintas escalas. El objetivo del TFM será evaluar si los descriptores derivados de estas representaciones permiten distinguir estructuras organizadas de las generadas por azar. El trabajo partirá de hipergrafos aleatorios uniformes de orden fijo, en los que cada posible hiperarista se incluye de forma independiente con probabilidad p. Se construirá un modelo s^2 de incidencia o adyacencia y se seleccionarán descriptores de conectividad y homología a distintas escalas. Mediante simulación Monte Carlo se estimarán sus distribuciones y variabilidad al modificar p y el tamaño del hipergrafo. Se diseñará un contraste basado en un estadístico que resuma los descriptores entre escalas, calibrado bajo el modelo aleatorio de referencia. Se evaluarán empíricamente su nivel y potencia frente a alternativas con estructura de comunidades, así como su sensibilidad a la adición o eliminación aleatoria de hiperaristas. El alcance prioriza un modelo s^2 y un contraste. Se entregarán una memoria y código reproducible en Python o R. Se recomiendan conocimientos de probabilidad, inferencia estadística, álgebra lineal y programación; las nociones de topología necesarias se introducirán durante el trabajo.

Referencia de partida: H. Molina-Abril, M.J. Morón-Fernández, M. Benito-Marimón, F. Díaz-del-Río y P. Real (2025). Topological scale framework for hypergraphs. Applied Mathematics and Computation, 485, 128989. DOI: 10.1016/j.amc.2024.128989.

Responsable: Pedro Real Jurado. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6853-0505

Facultad de Matemáticas

FORMULARIO NORMALIZADO OFERTA DE LÍNEAS DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER POR PARTE DE LOS DEPARTAMENTOS

Dpto.: Matemática Aplicada I

Líneas de trabajos ofertadas:

Los recientes avances en inteligencia artificial están abriendo nuevas posibilidades para el descubrimiento matemático.
Sistemas como AlphaEvolve combinan modelos de lenguaje de gran tamaño (LLMs) con técnicas de búsqueda evolutiva y evaluación automática para generar, evaluar y mejorar construcciones y algoritmos matemáticos.
En este TFM se estudiarán los fundamentos de estas metodologías y se explorará su aplicación a problemas matemáticos concretos. Para ello, se analizará el funcionamiento de los sistemas de descubrimiento matemático basados en modelos de lenguaje y búsqueda evolutiva, y se desarrollarán experimentos computacionales que permitan evaluar su capacidad para encontrar soluciones, identificar patrones y formular conjeturas.
Se prestará especial atención al papel de los asistentes de pruebas formales, como **Lean**, en la verificación de los resultados obtenidos.

Este TFM tiene 3 objetivos fundamentales:

- Comprender los métodos de descubrimiento matemático basados en IA, especialmente el uso de LLMs y búsqueda evolutiva.
- Reproducir y experimentar con algún problema matemático concreto, implementando un procedimiento simplificado de generación, evaluación y mejora de soluciones.
- Analizar los resultados matemáticamente, estudiando los patrones encontrados, la posibilidad de formular conjeturas y, cuando sea viable, demostrar los resultados y verificarlos con Lean.

Referencia: B. Georgiev, J. Gómez-Serrano, T. Tao y A. Z. Wagner. *Mathematical discovery and exploration can be done at scale*. Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), 2026.

Responsables: Rocío González Díaz

En Sevilla, a 21 de octubre de 2026